# Теоретические вопросы для экзамена

## Множества и алгебры

1. Понятия соответствия и отображения. Классификация отображений. Операции над соответствиями. Докажите дистрибутивность композиции соответствия относительно объединения. Почему нельзя, вообще говоря, заменить объединение пересечением?

2. Отношения эквивалентности и фактор-множества. Классы эквивалентности и их основное свойство. Где в доказательстве теоремы о том, что классы эквивалентности попарно не пересекаются, использовано свойство симметричности?

3. Теорема о неподвижной точке в индуктивно упорядоченном множестве. Где в доказательстве теоремы использована непрерывность отображения?

4. Доказать единственность нейтрального элемента и обратного элемента (для обратимого элемента) в моноиде. Где в этих доказательствах использовано свойство ассоциативности?

5. Понятие циклической группы. Теорема о порядке образующего элемента конечной циклической группы. Какие свойства степеней использованы в доказательстве?

6. Теорема Лагранжа для конечных групп. Докажите свойства смежных классов. Где в доказательстве теоремы Лагранжа использована конечность группы? Будут ли леммы о смежных классах справедливы для любой группы?

7. Определение кольца. Свойства кольца, вытекающие из его аксиом (основных тождеств): аннулирующее свойство нуля, тождества , дистрибутивность умножения относительно разности. Где в доказательствах использованы аксиомы и ранее доказанные свойства?

8. Теорема о конечной области целостности. Как изменится формулировка теоремы, если вместо конечной области целостности взять конечное кольцо (не обязательно коммутативное) без делителей нуля?

9. Полукольцо и его аксиомы (основные тождества). Почему аннулирующее свойство нуля нельзя доказать по той же схеме, что и для кольца?

10. Замкнутое полукольцо. Понятие бесконечной суммы. Что означают свойства непрерывности умножения и сложения в замкнутом полукольце? Какое из этих свойств вводится по определению, а какое доказывается?

11. Вывод формулы наименьшего решения праволинейного уравнения в замкнутом полукольце. Как в выводе использованы свойства бесконечной суммы?

12. Как доказывается существование решения системы линейных уравнений в замкнутом полукольце? Алгоритм решения.

## Графы

13. Теорема о существовании остова графа. Что такое фундаментальный цикл? Почему в неориентированном графе существует взаимно однозначное соответствие между обратными ребрами и фундаментальными циклами? Запишите соотношение между числом фундаментальных циклов, числом вершин, числом ребер и числом компонент связности в неориентированном графе. Зависит ли это соотношение от выбора остова?

14. Постановка задачи о путях в размеченном орграфе. Основная теорема о связи матрицы стоимостей и матрицы меток дуг размеченного орграфа. Какие свойства замкнутого полукольца и где именно используются при доказательстве этой теоремы?

## Регулярные языки и конечные автоматы

15. Теорема Клини. Докажите, что решение системы линейных уравнений с регулярными коэффициентами регулярно.

16. Лемма о разрастании для регулярных языков. Какое свойство графов используется в ее доказательстве?

## Комбинаторика

17. Чем отличается доказательство теоремы о структуре неоднородного линейного рекуррентного соотношения от такой же теоремы для однородного соотношения? Равенство (или неравенство) нулю какого определителя существенно при доказательстве?

18. В чем состоит важность понятия ступенчатой функции разметки при решении основной задачи теории Пойа? Связь с циклическим индексом группы. Формулировка основной теоремы.